recinte G_w essent per a $z=0$, $w=0$. Si existeix una altra variable ζ que permet passar conformement de C a la mateixa àrea G_w amb $\zeta=0$ per a $w=0$, z i ζ estaràn relacionades conformement. En aquesta correspondencia es verifica que per a $z=0, \zeta=0$; per a $|z|<1, |\zeta|<1$, per tant, o bé es verifica en tot punt de C_z

$$|\zeta|<|z| \qquad \text{o} \qquad \zeta=ze^{i\theta}$$

La primera part de la disjuntiva és inadmisible perquè amb el mateix raonament arribaríem a la contraria considerant z funció de ζ. Queda la segona. Prenent els eixos d'abscisses segons direccions homòlegues. queda

$$\zeta=z$$

Si no és el centre el punt fixat en el cercle com a homòleg d'un punt del recinte, cal només transformar-lo per una funció linial en altre cercle en què sigui el centre i aplicar la conclusió anterior. Per consegüent: *La representació conforme d'un recinte simplement conex damunt d'un cercle és determinada per dos punts interiors corresponents i dues direccions homòlegues.*

Queda així demostrat que a cada punt interior d'un recinte correspondrà al màxim un *radi*. (V. Conf. II).

3. Generalisacions del lema de Schwarz

I. Consideri's el cas en què l'homòleg de l'origen O en C_z no és l'origen, és a dir, en què $w \neq 0$ per a $z=0$. Suposem sempre que, per a $|z|<1$ el mòdul de la funció és $|w|<1$. Transformant el C_w mitjançant la funció

$$\zeta=\frac{a-w}{aw-1}$$

en què a (fig. 7) és la distancia a l'origen de l'homòleg O_w de 'origen O_z, s'obté una representació en què l'homòleg de O_w és el nou origen. I a tot punt interior a C_w correspòn un punt interior a C_ζ. A la representació conforme entre ζ i

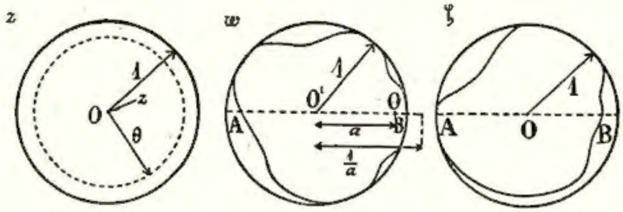

Fig. 7

z pot aplicar-se ja el lema de Schwarz. En conseqüencia per a tot valor de z dins de C_z serà:

$$|\zeta| \leqq |z|.$$

Es a dir, si

$$|z| = \theta \overline{\overline{<}} 1$$

es té

$$|\zeta| = \theta' \overline{\overline{<}} 1$$

essent

$$\theta' \overline{\overline{<}} \theta.$$

Als dos punts de la circumferencia de radi θ corresponen punts interiors als de la circumferencia de radi θ en el pla de la ζ. En el pla de la w corresponen als punts d'aquesta circumferencia els d'una altra C'_w en la qual O_w i O''_w són conjugats, essent O''_w conjugat de O_w respecte de C_w. Tots els punts de C'_w són interiors (fòra d'un) als de la circumferencia de centre O'_w i el radi de la qual és la màxima distancia de O'_w a C'_w, això és

$$\frac{a+\theta}{a\theta + 1}.$$

Per consegüent, per a $|z| = \theta \leqq 1$, es té la limitació següent

$$|w| \leqq \frac{|w(o)| + \theta}{|w(o)|\theta + 1}.$$

II. Sigui un cercle C_z el centre del qual no sigui l'origen i de la transformada w del qual se sab que té el mòdul inferior a M mentre z estigui dins d'aquell cercle. Sigui z_o son centre i r el radi.

Transformant C_z en altre cercle $C_{z'}$, que tingui per centre l'origen, mitjançant

$$z' = \frac{z - z_o}{r}$$

i d'altra part el cercle C_w de radi M en altre de radi 1 mitjançant

$$w' = \frac{w}{M}$$

podem aplicar l'anterior generalisació (I) del lema de Schwarz a la transformació de w' en z'. Es tindrà, si $|z'| \leqq \theta < 1$,

$$w' \leqq \frac{\left|\frac{w(z_o)}{M}\right| + \theta}{\left|\frac{w(z_o)}{M}\right|\theta + 1}$$

o sigui, si $\frac{|z - z_o|}{r} \leqq \theta < 1$,

$$|w| \leqq M \frac{|w(z_o)| + M\theta}{|w(z_o)|\theta + M}.$$

Si $z_o = o$,

$$|w| \leqq M \frac{|w(o)| + M\theta}{|w(o)|\theta + M}.$$

Si no es coneix $w(o)$ però se sab que és inferior a $M_o < M$, podem escriure

$$|w| \leqq M \frac{M + M\theta}{M + M_o}.$$

4. Teoremes de Carathéodory

I. Suposem una funció analítica i regular tal que, si $|z| \overline{<} 1$,

$$|\Re(w)| < \varepsilon$$

essent ε una constant positiva qualsevulga i designant per $\Re f(z)$ la part real de $f(z)$. Aquesta condició ens diu que tot punt interior a C_z té el seu corresponent en el pla w entre dues paral·leles a l'eix d'ordenades traçades aquestes a distancies $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$ respectivament d'aquell eix. Anem a demostrar que fixat dins de C_z un cercle de radi $\tau < 1$, la funció w no pot estendre indefinadament la representació del cercle $|z| \overline{<} \tau$ en el sentit de les ordenades (*), sinó que aquestes estàn també compreses entre certs límits independents de la funció w.

A aquest objecte es transformarà w mitjançant la funció

$$\zeta = e^{\frac{\pi i}{2\varepsilon} w}$$

S'obté axís de la regió compresa entre aquelles paral·leles, el semiplà.

D'aquest es passa al cercle C_z mitjançant

$$\zeta = \frac{1-\chi}{1+\chi}.$$

Evidentment C_z queda a l'interior de C_χ. Per tant si $|z| = \tau \overline{<} 1$,

$$|\zeta| < \tau$$

Passant a w,

$$\Re\left(\frac{\pi i}{2\varepsilon} w\right) < \log \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

o bé, anomenant $\Im(z)$ la part imaginaria dividida per i,

$$\frac{\pi}{2\varepsilon} |\Im(w)| < \log \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

(*) Si consideréssim el cercle total C_z el teorema seria fals.

Per tant, les ordenades estàn compreses entre dues rectes simètriques que disten de l'eix d'abscisses:

$$\pm \frac{2\varepsilon}{\pi} \log \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

II. Considerem finalment una funció analítica regular $w=f(z)$ amb les condicions següents

$$f(o)=1$$

$$h<|f(z)|<\frac{1}{h} \quad , \quad h<1$$

és a dir, $f(z)$ és situada en l'anell comprès entre

$$C_{hw} \text{ i } C_{\frac{w}{h}}$$

Fixat un cercle C_z en que $|z|\overline{\overline{<}}\tau<1$, li correspòn una certa área que és dins de l'anell, qualsevulga que sigui $f(z)$; anem a cercar una limitació d'aquesta àrea, independent de $f(z)$.

L'anell es transforma en l'àrea del cas anterior mitjançant la funció

$$w'=\log w=\log|w|+i\varphi$$

essent φ l'argument de w. Aplicant, doncs, el resultat anterior, es té

$$|\mathfrak{J}(w')|<\frac{-2\log h}{\pi}\log\frac{1+\tau}{1-\tau} \qquad (|z|=\tau\overline{\overline{<}}1).$$

Però $\mathfrak{J}(w')$ és l'argument φ; per tant l'àrea transformada està en l'angle $\pm\varphi$ essent donat φ pel valor que és a la dreta del signe $<$ en l'expressió anterior.

CONFERENCIA IV